第42卷 第 期 2022年 月
桂林电子科技大学学报
Journal of Guilin University of Electronic Technology
Vol. 42, No. . 2022

一种面向机器人机械系统的程式化动力学建模方法

庄　未，康文杰，黄用华，高振宇，杨继伟

（桂林电子科技大学 机电工程学院，广西 桂林　541004）

摘　要：针对机器人动力学模型复杂、冗余计算导致运算效率低的问题，提出一种程式化建模方法（PMM）。以六自由度斯坦福机械臂为例，利用该方法建立基于拉格朗日方程的动力学模型，按照“正向分析，逆序输出”的核心思想，重点分析模型递推过程；在验证模型正确性的基础上，比较使用PMM和未使用PMM的常规拉格朗日方程所建立的斯坦福机械臂力学模型在计算机中的“尺寸”和运行时间等指标。实验结果表明，相对常规拉格朗日方法，由PMM所建模型的复杂程度降低了67.6%，计算效率提高了66.3%；斯坦福机械臂为完整约束系统，将PMM推广到欠驱动非完整约束系统，采用与模型紧密相关的部分反馈线性化控制算法进行数值仿真和物理样机实验分析，验证了PMM的可靠性和有效性，为不同类型的机器人提供了一种效率高、通用性强的动力学建模方法。

关键词：动力学；建模；程式化；输出膨胀；运算效率；机器人

中图分类号：TP242　　**文献标志码**：　　**文章编号**：1673-808X(2022)00-0000-00

A programmed dynamic modeling method for robot mechanical system

ZHUANG Wei, KANG Wenjie, HUANG Yonghua, GAO Zhenyu, YANG Jiwei

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Aiming at the problem of low efficiency caused by complex and redundant calculation of robot dynamics model, a programmed modeling method is proposed. Taking the Stanford Arm with six degrees of freedom as an example, the dynamic model based on Lagrangian equation is established by using this method. According to the core idea of "forward analysis, reverse output", the recursive process of the model is analyzed emphatically. On the basis of verifying the correctness of the model, the indexes such as the dimensions and running time of the Stanford Arm model based on the PMM and the conventional Lagrange equation without the use of the PMM are compared. The results show that relative to the conventional Lagrange method, the complexity of the model established by PMM is reduced by 67.6%, and the computational efficiency is increased by 66.3%. Stanford Arm is a complete constrained system. PMM is extended to underactuated nonholonomic constrained systems, numerical simulation and physical prototype experiment analysis are carried out by using partial feedback linearization control algorithm which is closely related to the model, it's reliability and effectiveness of the programmed modeling method are verified, which provides a modeling method with higher efficiency and better versatility for different types of robots.

Key words: dynamics; modeling; programmed; output expansion; computation efficiency; Robot

复杂系统动力学模型是进行运动控制的重要基础，而动力学建模方法在很大程度上决定了模型的准确性和计算效率，从而影响控制效果，因此受到了许多学者的广泛关注。

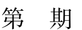
近年来，机器人动力学建模方法主要有两种。第一种方法为基于分析系统力和力矩矢量的建模方法，其属于牛顿经典力学范畴，例如牛顿-欧拉（NE）法和Kane方法。Kvrgic等[1]认为NE法是推导机械臂动力学模型的一种非常有效的计算方法，且将该方法应用于六自由度机器人，并与其他方法的计算效率进行

收稿日期：2021-08-13

基金项目：国家自然科学基金（52165001，51865005，51765011）；广西自然科学基金（2018JJA160115，2018JJA160116）；

通信作者：黄用华（1977－），男，副教授，博士，研究方向为机器人动力学及控制技术。E-mail：huangyonghuaxj@sina.com

引文格式：庄未，康文杰，黄用华，等．一种面向机器人机械系统的程式化动力学建模方法[J]．桂林电子科技大学学报，2022，42(4)：



比较。王健等[2]根据 NE 法建立了四旋翼飞行器的非线性模型并设计控制器，实现了对四旋翼飞行器系统双环控制。赵丽美[3]和 Ghariblu 等[4]采用 NE 法分别建立蛇形机器人和新型移动球形机器人动力学模型，均实现了基于模型的运动控制研究，特别是后者提出的动力学方程中有关微分代数方程的计算方法。Luh 等[5]开发出一种效率更高的递归 NE 法，独立于机器人配置的类型，文献[6-8]中有着许多类似的应用。Kane 方法综合分析力学和矢量力学的优点，以“广义速率”取代“广义坐标”作为独立变量，引入偏速度、偏角速度独特概念，着手于广义主动力、广义惯性力的计算。Hussain 等[9]认为 Kane 方法优于 NE 法和 Lagrange 方法，并利用 Kane 方法建立了三自由度机构运动链的动力学模型，可为研究 Kane 方法的初学者提供了指导性的意见。Huang 等[10]采用 Kane 方程以螺旋理论的形式建立了前轮驱动自行车机器人的动力学模型，为其他类似非完整约束系统建模提供了参考。Kane 等[11]建立了基于 Kane 方程的六自由度斯坦福机械臂的动力学模型，与 NE 法建立的模型在运算次数上作比较，结果表明 Kane 方法计算效率更高。庄未等[12]采用同样的方法建立了球形机器人的动力学模型，并完成了直线和 S 曲线运动的仿真分析。

第二种是基于分析系统能量和功的建模方法，即属于分析力学范畴，如基于 Chaplygin 方程或 Lagrange 方程的建模方法。Zhang 等[13]采用 Lagrange 方程建立球形机器人动力学模型，实现了对整个系统的实时控制。Ruan 等[14]利用 Euler-Lagrange 方程对独轮车机器人进行建模，并完成了一系列的实验。李梦飞[15]基于 Lagrange 方程建立了六自由度机械臂的动力学模型，并通过 ADAMS 动力学仿真验证了模型的正确性。文献[16-19]给出了 Lagrange 方程在其他机械臂及多自由度机器人上的应用。对于欠驱动非完整约束系统，在文献[20-21]中应用 Lag-range 方程的另一种形式 Chaplygin 方程分别建立了变结构两轮车机器人和独轮车机器人的动力学模型，并完成了一系列仿真分析和物理样机实验。

通过对上述文献中关于动力学建模方法的研究可知，牛顿经典力学分析过程繁杂，会产生大量的约束反力，对于复杂的力学系统，其难以直接应用；基于能量分析的方法，随着自由度的增加，其模型输出容易产生横向膨胀，导致偏导数、导数计算难以进行，即所谓的维数灾难，带来重复计算、运行效率低下的问题。

鉴于此，提出一种程式化建模方法，通过对系统运动学的正向分析和系统动力学模型的逆序输出，解决了建模过程中模型复杂、输出膨胀等问题。

1　方法描述

传统建模方法从系统广义坐标逐步计算动力学方程所需元素，然而建模过程实则是符号计算的过程，这将使变量表达式被层层迭代，容易导致模型输出膨胀。PMM 解决了这一问题，其大体分为系统运动学的正向分析和系统动力学模型的逆序输出 2 个步骤。正向分析是对所研究对象的系统分析，包括坐标系分析、角速度和质心速度分析、运动约束分析、动能和力函数分析、变量蕴含关系分析等；逆序输出是指将动力学方程所需元素的计算结果按逆序输出，确保模型不膨胀。图 1 为 PMM 总体思路示意。

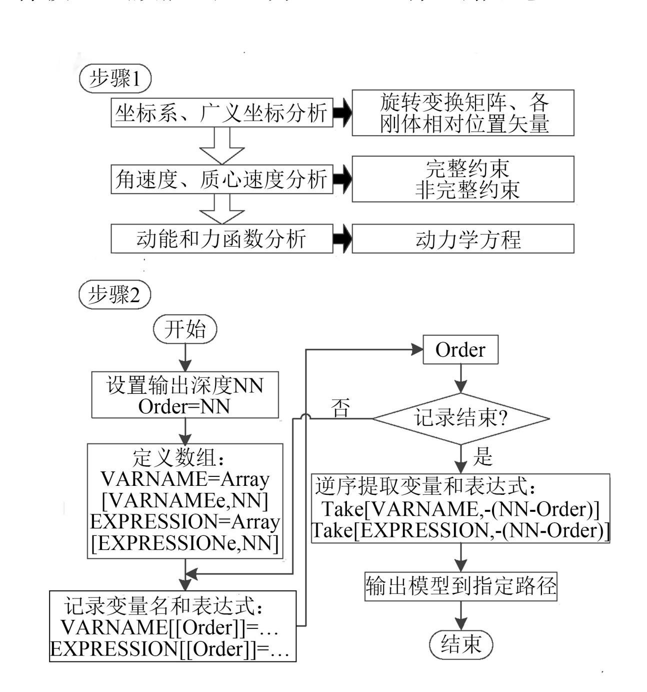


图 1　PMM 总体思路

PMM 的核心思想：正向分析开始于广义坐标，中间包括速度、非完整约束分析等，终止于系统的动能和势能，其关键在于引入中间变量后建立变量的隶属关系表；逆序输出始于动能（势能）对广义坐标或广义速度的偏导数，通过变量隶属关系，根据链式求导的方法逐步传播扩散，最终分析出最原始、最基本的偏导数项，并按链式求导时先后顺序的逆序进行输出。

在实际建模过程中，以上技术手段尚不能完全保证输出最合理、最简洁的力学模型，有时会遇到 0 变量、变量重复定义和顺序错乱等问题，图 2 所示算法用以解决上述问题。

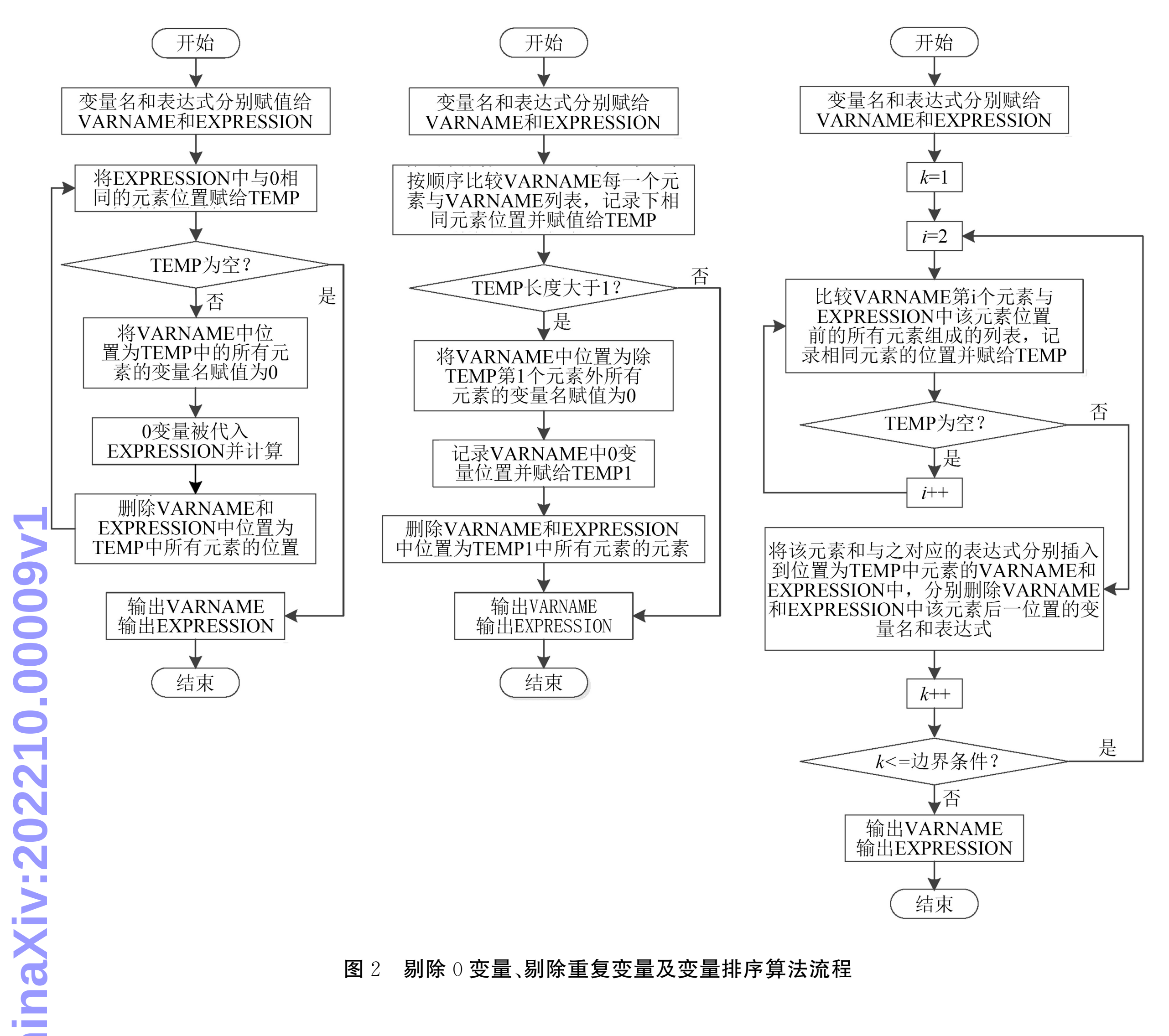


图2　剔除0变量、剔除重复变量及变量排序算法流程

2　斯坦福机械臂建模与仿真分析

为更加直观地介绍PMM和说明其高效性，应用该方法建立斯坦福机械臂动力学模型[11]，机构简图如图3所示。

它由6个构件组成，分别记为$B_i(i=1\sim6)$，B_3通过滑动副与B_2相连，以实现平移运动；B_2、B_4、B_6通过相应旋转关节分别与B_1、B_3、B_5相连，作定轴转动。

坐标系及广义坐标描述：

1) $e_j^{(i)}$，i、$j=1\sim3$，表示B_i坐标系x、y、z轴；

2) $e^{(0)}$为大地坐标系，$e_2^{(0)}$始终与地面垂直；

3)初始时刻，各坐标系轴与大地坐标系轴方向一致，坐标系$e^{(2)}$和$e^{(3)}$原点重合；

4)选取q_i，$i=1\sim6$，表示系统的6个广义坐标。

建模过程中所使用的符号及含义如表1所示。特别说明：k、m、n均属于i。

表1　系统变量定义

符号	含义
$q_i(\dot{q}_i)$	B_i相对B_{i-1}转角或距离(角速度或线速度)
$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Bi}}^{(k)}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bic}}^{(k)})$	B_i角速度(质心线速度)在$e^{(k)}$下的矢量描述
$\boldsymbol{l}_{\mathrm{Bic}}^{(k)}(\boldsymbol{l}_{\mathrm{oi}}^{(k)})$	B_i质心($e^{(i)}$原点)位置在$e^{(k)}$下的矢量描述
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bio}}^{(k)}$	$e^{(i)}$原点线速度在$e^{(k)}$下的矢量描述
${}_n^m\boldsymbol{R}$	$e^{(m)}$系到$e^{(n)}$系的旋转变换矩阵
g	重力加速度

2.1　正向分析过程

根据机器人学公式可知，$e^{(0)}$转换为$e^{(4)}$的旋转变换矩阵：

$$ {}_0^4\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Rot}(y,-q_3)\cdot\boldsymbol{Rot}(x,-q_2)\cdot\boldsymbol{Rot}(y,-q_1), \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{Rot}(p,-q_j)(p=x,y;j=1\sim3)$为绕$P$轴转$-q_j$的旋转变换矩阵。

由刚体运动学原理可知，B_4角速度：

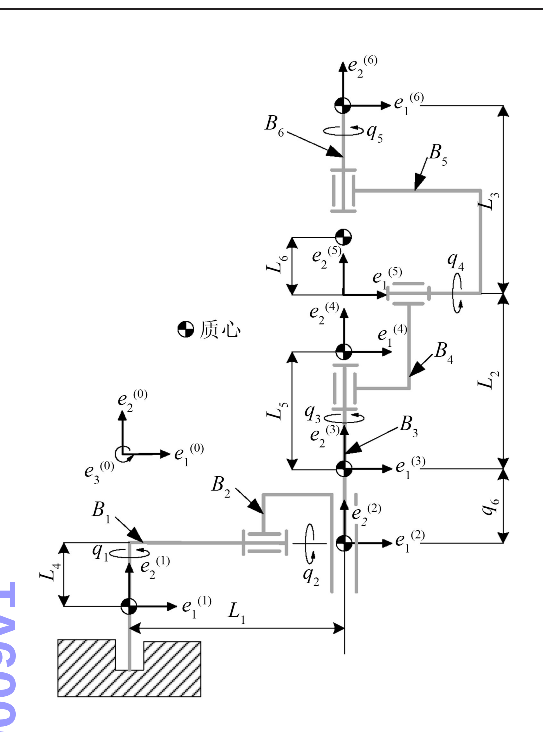


图 3　斯坦福机械臂机构

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B4}}^{(4)}={}_0^4\boldsymbol{R}\cdot\dot{q}_1\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{Rot}(y,-q_3)\cdot\boldsymbol{Rot}(x,-q_2)\cdot\dot{q}_2\boldsymbol{e}_1+\dot{q}_3\boldsymbol{e}_2,\tag{2}$$

其中,$e_j(j=1\sim3)$为第 j 个轴的单位矢量。

以 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B4}}^{(4)}$ 为参考,其他各刚体角速度均在自身坐标下表示,如表 2 所示。

表 2　刚体角速度

刚体	角速度计算公式
B_5	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B5}}^{(5)}={}_4^5\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B4}}^{(4)}+\dot{q}_4\boldsymbol{e}_1$
B_6	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B6}}^{(6)}={}_5^6\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B5}}^{(5)}+\dot{q}_5\boldsymbol{e}_2$
B_7	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B3}}^{(3)}={}_4^3\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B4}}^{(4)}-\dot{q}_3\boldsymbol{e}_2)$
B_2	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B2}}^{(2)}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B3}}^{(3)}$
B_1	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B1}}^{(1)}={}_2^1\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B2}}^{(2)}-\dot{q}_2\boldsymbol{e}_1)$

由图 3 可见,B_1 质心不随转动而改变位置,即刚体 B_1 质心速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B1c}}^{(1)}=\boldsymbol{0}$;$B_5$ 坐标系原点与质心不重合,$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B5c}}^{(5)}$ 可通过 $e^{(5)}$ 系原点速度求得,该原点速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B5o}}^{(3)}={}_1^2\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B2}}^{(2)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{o5}}^{(2)}+\dot{q}_6\boldsymbol{e}_2,\tag{3}$$

其他刚体质心速度计算公式如表 3 所示。

表 3　刚体质心速度

刚体	质心速度计算公式
B_2	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B1}}^{(1)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}$
B_3	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B3c}}^{(3)}={}_1^3\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B2}}^{(3)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{B3c}}^{(3)}+\dot{q}_6\boldsymbol{e}_2$
B_4	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B4c}}^{(3)}={}_1^3\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B2}}^{(3)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{B4c}}^{(3)}+\dot{q}_6\boldsymbol{e}_2$
B_5	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B5c}}^{(5)}={}_3^5\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{B5o}}^{(3)}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B5}}^{(5)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{B5c}}^{(5)}$
B_6	$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B6c}}^{(5)}={}_3^5\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{B5o}}^{(3)}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B5}}^{(5)}\times\boldsymbol{l}_{\mathrm{B6c}}^{(5)}$

由表 2、3 可求出系统总动能,系统各刚体动能分为转动动能和平动动能,则有

$$T=\sum_{i=1}^{6}(\boldsymbol{M}_i\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bic}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{Bic}}{}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{J}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Bi}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Bi}}{}^{\mathrm{T}})/2,\tag{4}$$

其中:$\boldsymbol{M}_i$ 与 $\boldsymbol{J}_i$ 为三维质量矩阵,且 $\boldsymbol{M}_i=m_i\boldsymbol{I}$,$m_i$ 为各刚体质量,$\boldsymbol{I}$ 为 3×3 单位阵;$\boldsymbol{J}_i=\mathrm{diag}(J_x,J_y,J_z)$,其中 J_x,J_y,J_z 为刚体 B_i 绕过质心对应的转动惯量。

以 $e^{(1)}$ 原点为零势能参考面,B_5 质心高度,则

$$h_5=({}_1^0\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{l}_{\mathrm{B2c}}^{(1)}+{}_2^0\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{l}_{\mathrm{o5}}^{(2)}+{}_5^0\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{l}_{\mathrm{B5c}}^{(5)})[2],\tag{5}$$

注:[2]表示取矢量第二个元素,即矢量在 e_2 轴上的投影(质心高度)。

其他刚体质心高度计算类似,求得系统总重力势能

$$U=\sum_{i=1}^{6}m_i\cdot h_i\cdot g。\tag{6}$$

2.2　逆序输出过程

基于拉格朗日方程的动力学模型:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=\tau_i,\tag{7}$$

其中,τ_i 为关节驱动力矩。

如前所述,逆序输出过程始于动能(势能)对广义坐标或广义速度的偏导数。以建立 $\dfrac{\partial T}{\partial q_i}$ 为例,将式(4)化为系数与角速度乘积之和的形式,为表示该系数引入中间变量 $u_l(l=1\sim18)$,此时总动能

$$T=\sum_{l=1}^{18}u_l\dot{q}_n\dot{q}_k(n,k=1\sim6)。\tag{8}$$

同样,分析出式(6)中各函数及变量蕴含关系,如表 4 所示。

表 4　变量隶属关系表

函数	变量	函数	变量
T	$u_1\sim u_{18}$ $\dot{q}_1\sim\dot{q}_6$	U	q_2,q_3,q_4,q_6
$u_1,u_7\sim u_9$	$q_2\sim q_6$	u_{13},u_{16}	q_4,q_5
u_{10},u_{11}	q_2,q_3,q_4	u_{17},u_{18}	q_4
u_2,u_{12},u_{13}	$q_3\sim q_6$	u_4	q_5
u_{14},u_{15}	q_3,q_4	u_5,u_6	无

由表 4 可知,引入中间变量后,动能 T 是 $u_l(l=1\sim18)$的函数,u_l 又是 $q_i(i=2\sim6)$的函数,根据链式求导法则有

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_{l=1}^{18}\frac{\partial T}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_i}(i=2\sim6),\tag{9}$$

中间变量 u_l 中的 q_i 除 q_6 外均以三角函数出现,故有

$$\frac{\partial u_l}{\partial q_i}=\frac{\partial u_l}{\partial s_i}c_i-\frac{\partial u_l}{\partial c_i}s_i(i=2\sim 5),\qquad(10)$$

其中，$s_i=\sin q_i$，$c_i=\cos q_i$。

为避免模型膨胀及重复运算，中间变量不被代入函数或相关表达式中。具体来说，当输出式(9)时，式(10)不被代入式(9)。

2.3 仿真分析

运用 Mathematic 软件编写相关程序，并结合自行编写的格式转换脚本(.m 文件)将模型自动输出为不同格式(.m 或.c)的文件，用于 MATLAB 仿真或 VC++环境下的控制器设计。采用 PMM 建立的斯坦福机械臂动力学模型见附录。

在仿真实验中，采用文献[11]中规划的轨迹和结构参数，以验证 PMM 所建斯坦福机械臂力学模型的可靠性。设置仿真时间为 10 s，动力学第二类问题仿真分析结果如图 4 所示。

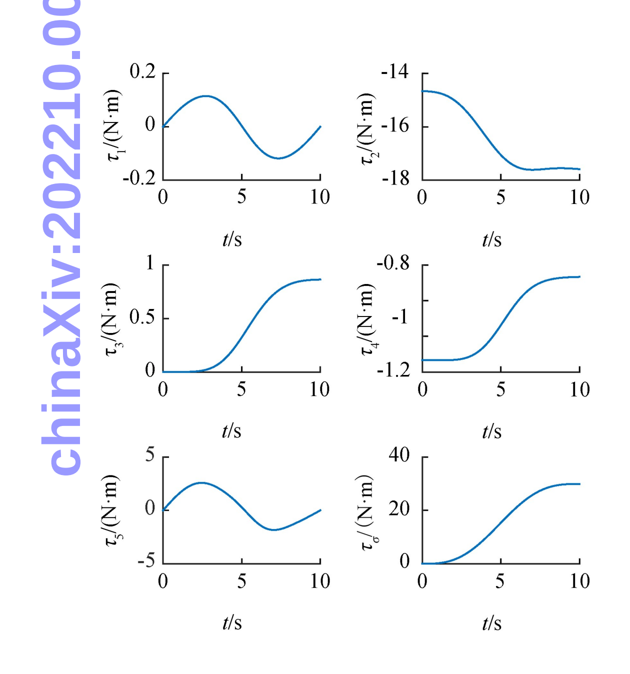


图 4 斯坦福机械臂仿真曲线

从图 4 可看出，基于 PMM 建立的斯坦福机械臂动力学模型的仿真曲线与文献[11]中仿真曲线一致，验证了模型的可靠性。在此基础上，采用未使用 PMM 的常规 Lagrange 方法[15]建立斯坦福机械臂动力学模型，并做出比较，如表 5 所示。

由表 5 可看出，相较于常规 Lagrange 法，PMM 建立的斯坦福机械臂动力学模型在变量个数上增加 80 个，但模型"尺寸"缩减了 57.9%，体现了 PMM 以深度换取宽度的优势；计算总操作数由 11 015 次降为 3 563 次，模型复杂程度降低了 67.6%。2 种方法

表 5 PMM 与常规 Lagrange 方法所建模型参数

对比项目	常规 Lagrange 法	PMM
变量个数/个	18	98
模型大小/KB	38	16
计算耗时/μs	28.8	9.7
加法次数/次	2 870	1 066
减法次数/次	744	247
乘法次数/次	7 371	2 236
除法次数/次	30	14

建立的斯坦福机械臂模型运行在主频 1.8 GiB、双核 CPU、2 GiB 内存、Win7 操作系统和 VC++环境的工控机平台上，进行 10 次测试，PMM 所建模型平均耗时 9.7 μs，而常规 Lagrange 方法这一数值为 28.8 μs，运行效率提高了 66.3%。

3 PMM 在欠驱动非完整约束系统的验证

如前所述，将 PMM 应用于斯坦福机械臂完整约束系统，已说明其输出动力学模型在"尺寸"和运行时间上的优势。为阐明 PMM 适用范围和进一步验证该方法的有效性，将其推广到欠驱动非完整约束系统。

变结构两轮车机器人具有静态不稳定而动态稳定的特性，是典型的欠驱动非完整约束系统。以变结构两轮车机器人原地俯仰平衡实验为例，机构简图及物理样机如图 5、6 所示。

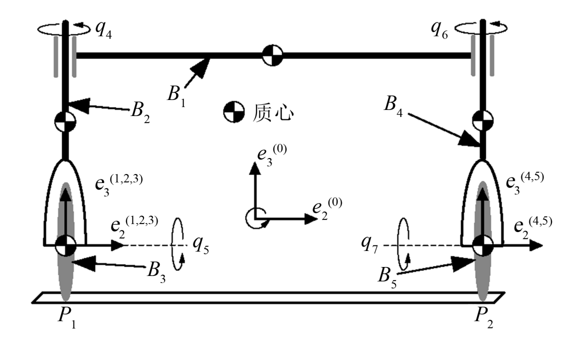


图 5 机构简图

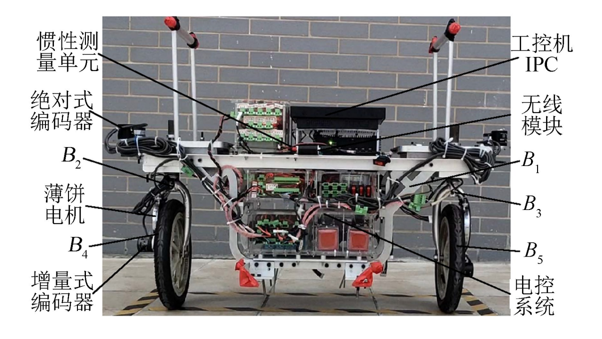


图 6 物理样机

系统由车架 B_1、2 个车叉（B_2，B_4）及 2 个车轮（B_3，B_5）构成，坐标系 $e^{(k)}$（$k=1,2,3$）原点均在 B_3 质心处，$e^{(m)}$（$m=4,5$）原点均在 B_5 质心处，2 个接地点分别为 P_1 和 P_2。

实验基于 PMM 所建立模型和高度依赖系统模型的部分反馈线性化控制算法。车架 3 个欧拉角 q_1、q_2、q_3（航向角、横滚角、俯仰角）由旋转序列 $e_3-e_1-e_2$ 决定，车架俯仰角直接影响车体的平衡，取俯仰角为输入，车轮转矩为输出，于是

$$v=k_p(q_3-q_{3d})+k_d(dq_3-dq_{3d}), \quad (11)$$

其中：v 为虚拟控制量；q_3 和 dq_3 为车身俯仰角和俯仰角速度，q_{3d} 和 dq_{3d} 为期望值；k_p 和 k_d 为控制参数。

设计部分反馈线性化控制器，

$$\tau_w=DD\cdot v+EE, \quad (12)$$

其中：τ_w 为车轮电机转矩；DD 和 EE 为与模型相关变量。

基于该控制器的控制参数设定为：

数值仿真：$k_p=-50$，$k_d=1$；

物理样机实验：$k_p=100$，$k_d=103$。

图 7、8 分别给出了仿真结果和实验数据，图 9 为物理样机实验视频连拍图。由图 7 可见，车架俯仰角和车轮驱动力矩在有限时间内快速收敛到 0 附近。由图 8、9 可见，车架俯仰角在 ±0.02 rad 范围内波动，车身处于俯仰平衡，故变结构两轮车机器人实现了原地俯仰平衡控制实验。

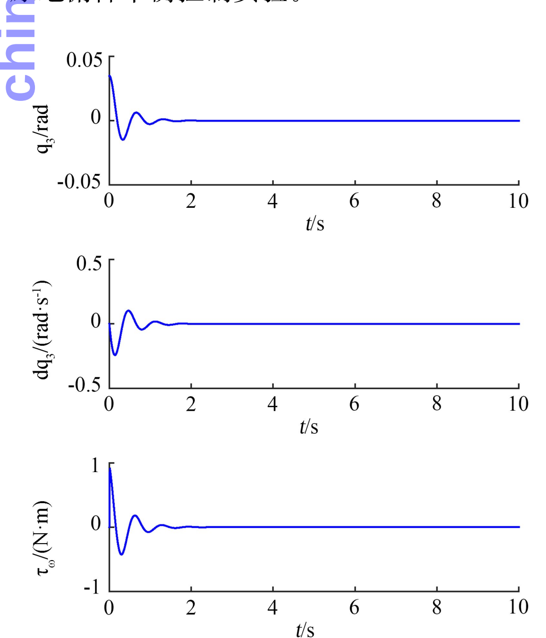


图 7 原地俯仰平衡仿真曲线

进一步，将 PMM 应用于该样机摆动车把模式下

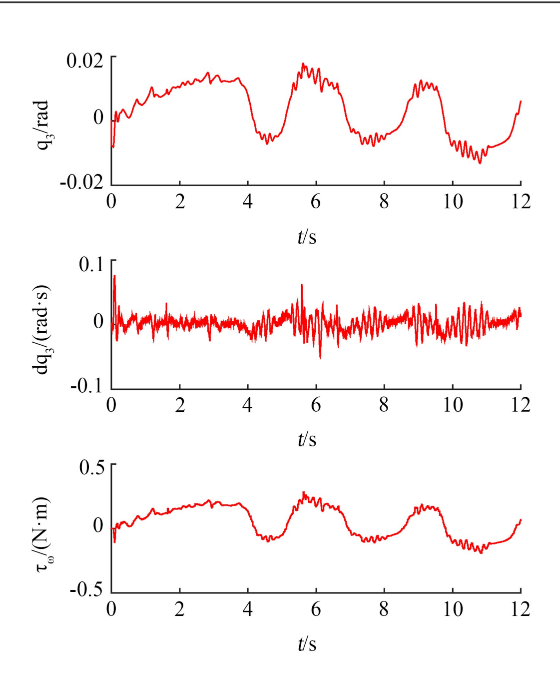


图 8 原地俯仰平衡实验数据

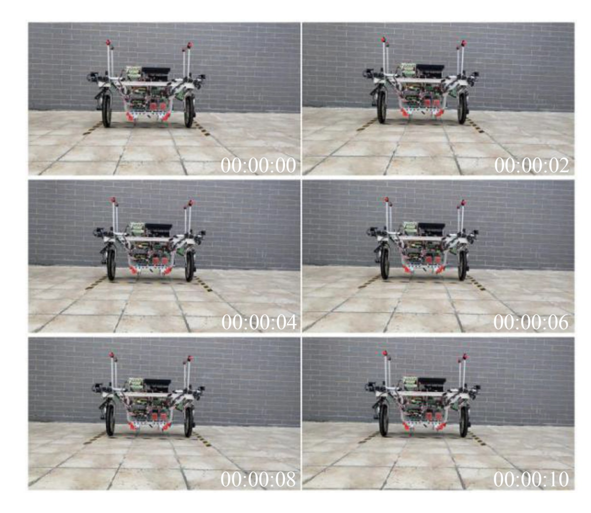


图 9 原地俯仰平衡实验视频连拍

行走平衡实验中[20]。仅给出实验部分视频连拍图，如图 10 所示，样机平衡时间在 10 s 以上。最终，应用 PMM 建立的变结构两轮车机器人力学模型仅有 11 KiB，运行在 DSP（TMS320F28335，150 MiB 主频）硬件平台上，平均耗时 14.3 μs。由于物理样机实验伺服周期为 33 ms，模型运行时间仅占整个伺服周期的 0.04%。两者的时间差说明，PMM 模型计算的极少量耗时可以为数据采集、控制器计算和数据传输等留有足够的时间裕度。故 PMM 所建立的动力学模型满足实时计算的要求，验证了 PMM 在变结构两轮车机器人系统中的有效性与可靠性。

将 PMM 继续推广到独轮车机器人直线行走定位控制实验[21]，机构简图与样机如图 11 所示。

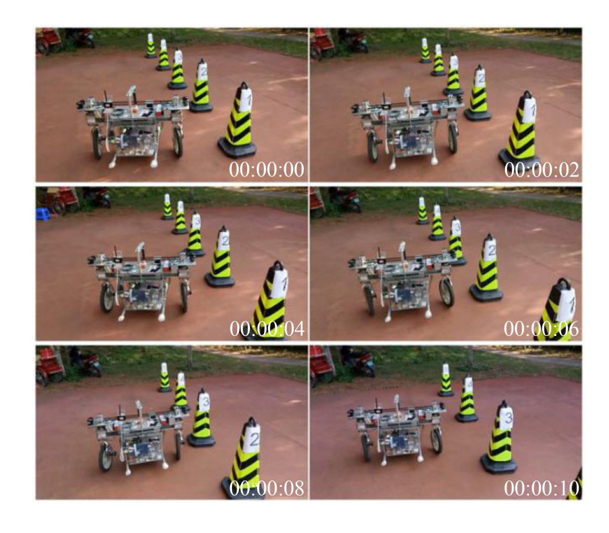
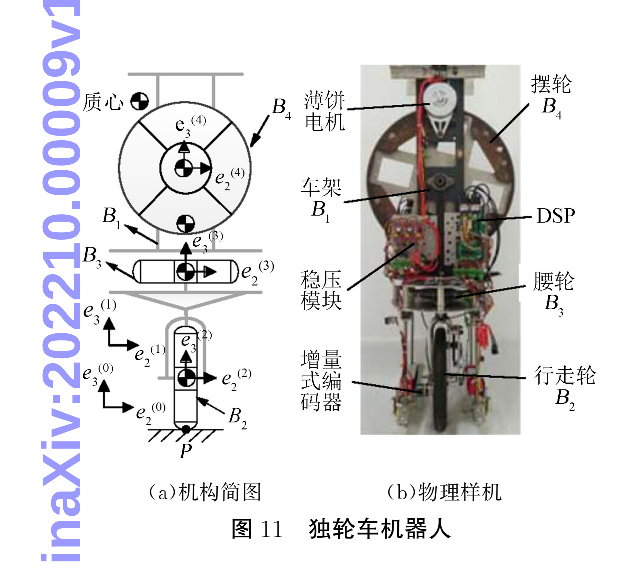


图 10 摆车把行走平衡实验视频连拍



(a)机构简图 (b)物理样机

图 11 独轮车机器人

图 12 给出了实验数据曲线，图 13 为物理样机实验视频连拍图。由图 12、13 可看出，独轮车机器人横滚角和俯仰角稳定在±0.05 rad 范围内，行走轮质心在 x 方向上的位移从 0 m 运动到 3 m 附近后，在小范围内保持稳定，期望值为 3.2 m，误差仅占总长的 6%；行走轮质心在 y 方向上的位移在±0.005 m 范围内波动，说明车身在作直线运动，实现了独轮车机器人直线定位控制目标，验证了模型可靠性。最终，完成独轮车机器人直线定位控制实验的动力学模型仅有 22 KiB，运行在主频 1.8 GiB、双核 CPU、2 GiB 内存、Win7 操作系统和 VC++环境的工控机平台上，平均耗时 24.7 μs。独轮车机器人物理样机实验伺服周期为 44 ms，模型运行时间仅占整个伺服周期的 0.05%，与两轮车机器人情况类似，也可以说明 PMM 输出模型的计算耗时可满足物理样机实验中实时计算的需要，验证了 PMM 在独轮车机器人系统中的有效性。

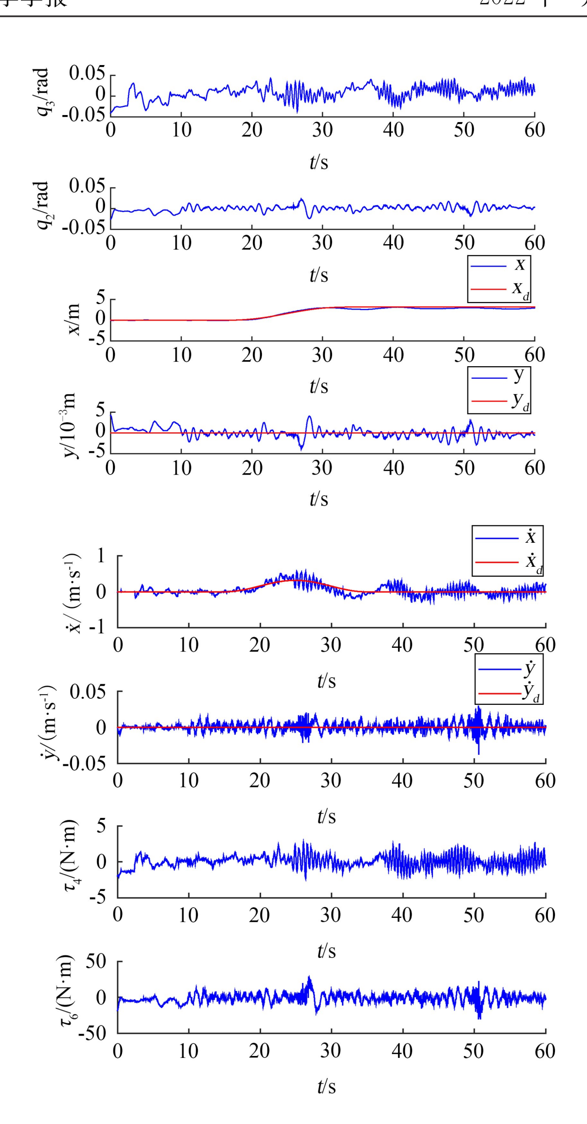


图 12 独轮车机器人直线定位控制实验数据曲线



图 13 直线定位实验视频连拍图

综上所述，所提方法(PMM)满足不同欠驱动非完整约束系统的基础实验要求，验证了有效性与可靠性，更进一步说明 PMM 高效和通用性强的特点。

4 结束语

1)提出一种程式化动力学建模方法(PMM),利用该方法建立斯坦福机械臂力学模型并作仿真分析,仿真结果验证了 PMM 的可靠性。进一步,将 PMM 和常规 Lagrange 方法所建立的斯坦福机械臂动力学模型相比发现,PMM 所建模型的复杂程度降低了 67.6%,运行在主频 1.8 GiB、双核 CPU、2 GiB 内存、Win7 操作系统和 VC++环境的工控机平台上,计算效率提高了 66.3%。

2)将 PMM 推广到欠驱动非完整约束系统,仿真分析和物理样机实验结果表明,应用 PMM 所建立的动力学模型可满足不同物理样机及不同基础实验的实时计算要求,验证了 PMM 在欠驱动非完整约束系统的有效性,进一步阐明了 PMM 通用性强、适用范围广的特点。

3)PMM 所表现出的高效、便捷及通用性强等特点,为机器人领域建立动力学模型所用方法提供一种选择,具有较强的指导意义和参考价值。

参考文献:

[1] KVRGIC V, VIDAKOVIC J. Efficient method for robot forward dynamics computation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 145: 103680.

[2] 王健,王承龙,李智,等. 基于自适应模糊 PID 的四旋翼飞行器悬停控制[J]. 桂林电子科技大学学报, 2016, 36(5): 406-411.

[3] 赵利美. 蛇形机器人的动力学建模与控制方法研究[D]. 北京:北京化工大学, 2018: 21-22.

[4] GHARIBLU H. A new mobile ball robot-dynamic modeling and simulation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(10-11): 3103-3115.

[5] LUH J Y S, WALKR M W, PAUL R P C. On-line computational scheme for mechanical manipulators[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1980, 102(2): 69-76.

[6] RACKL W, LAMPARIELLO R, ALBU-SCHAFFR A. Parameter identification methods for free-floating space robots with direct torque sensing[J]. IFAC Proceedings, 2013, 46(19): 464-469.

[7] 王航,祁行行,姚建涛,等. 工业机器人动力学建模与联合仿真[J]. 制造业自动化, 2014, 36(17): 73-76.

[8] 师名林,赵新华. 四自由度串联机械手的逆动力学建模及仿真[J]. 天津理工大学学报, 2006(5): 37-40.

[9] HUSSAIN Z, AZLAN N Z. KANE′s method for dynamic modeling[C]//2016 IEEE International Conference on Automatic Control and Intelligent Systems (I2CACIS). Piscataway, NJ: IEEE Press, 2016: 16774371.

[10] HUANG Yonghua, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Research on dynamics of a bicycle Robot with frontwheel drive by using Kane equations based on screw Theory[C]//2010 International Conference on Artificial I-ntelligence and Computational Intelligence. Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society, 2010: 546-551.

[11] KANE T R, LEVINSON D A. The use of kane′s dynamical equations in robotics[J]. The International Journal of Robotics Research, 1983, 2(3): 3-21.

[12] 庄未,刘晓平,孙汉旭. 一种带有可伸缩臂的球形机器人建模及分析[J]. 机械科学与技术, 2010, 29(8): 1035-1041.

[13] ZHANG Qin, JIA Qingxuan, SUN Hanxu, et al. Applica-tion of a genetic algorithm-based PI controller in a sphe-rical robot[C]//2009 IEEE International Conference on Control and Automation. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 180-184.

[14] RUAN Xiaogang, HU Jingmin, WANG Qiyuan. Modeling with Euler-Lagrang equation and cybernetical analy-sis for a unicycle robot[C]//2009 Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 108-111.

[15] 李梦飞. 六自由度工业机械臂动力学建模及仿真[J]. 科学技术创新, 2019(25): 39-40.

[16] BOUGHDIRI R, NASSER H, BEZINE H, et al. Dynamic modeling and control of a multi-fingered robot hand for grasping task[C]//international Symposium on Robotics and Intelligent Sensors 2012 (IRIS 2012). Piscataway, NJ: IEEE Press, 2012, 41: 923-931.

[17] 赵杭波. 双连杆机械臂的动力学建模[J]. 电子制作, 2013(15): 52.

[18] SAFEEA M, NETO P, BEAREE R. Robot dynamics: A recursive algorithm for efficient calculation of Christoffel symbols[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 142: 103589.

[19] XING Li, WANG Xiaofeng, WANG Jianhui. A kind of Lagrange dynamic simplified modeling method for multi-DOF robot[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Sys-tems, 2016, 31(4): 2393-2401.

[20] 何淑通. 变结构两轮车机器人的设计与运动控制研究[D]. 桂林:桂林电子科技大学, 2017.

[21] 庄未,章坤,张瑞欣,等. 独轮车机器人直线定位控制的分析与实验[J]. 上海:机械设计与研究, 2020, 36(6): 29-34.

编辑: